LES SITUATIONS-RECHERCHE
APPRENDRE À CHERCHER EN MATHÉMATIQUES

Léa Cartier	PhD student	Laboratoire Leibniz, Grenoble, France.	lea.cartier@imag.fr
Karine Godot	PhD, médiatrice scientifique	Laboratoire Leibniz, Grenoble, France.	karine.godot@imag.fr
Eva Knoll	PhD student, lecturer	Mount Saint Vincent University, Halifax, Canada.	eva.knoll@msvu.ca
Cécile Ouvrier-Buffet	PhD	IUFM de Créteil, Université Paris 7 DIDIREM, Paris, France.	cecile.ob@wanadoo.fr

www.mathsamodeler.net

INTRODUCTION

Dans les programmes scolaires de mathématiques se dessine un intérêt nouveau pour la démarche de recherche en mathématiques. L'expression même de « démarche de recherche en mathématiques » a pris une place importante et apparaît actuellement de manière récurrente dans les instructions officielles françaises, du primaire au secondaire, et même à l'entrée de l'université. Il est en effet préconisé de confronter les élèves à « de véritables problèmes de recherche » (cycle 2 de l'école primaire), à « une véritable activité mathématique » (collège), de les initier à « la pratique d'une démarche scientifique globale » (classe de Terminale). L'introduction de ce type d'activités au sein des programmes français vise à « intéresser les élèves à la pratique des mathématiques », en faisant de la classe « une véritable petite communauté mathématique » (instructions officielles du primaire). Il ne s'agit pas seulement que les élèves trouvent du plaisir dans ces activités de recherche : il est bien davantage question d' « éviter de donner des mathématiques une vision étriquée réduite à des techniques » (instructions de terminale scientifique).
Cette dimension « recherche », qui se veut donc proche de l'expérience des chercheurs professionnels, s'inscrit dans une vision des mathématiques scolaires qui donne plus de poids, relativement, au raisonnement mathématique qu'aux connaissances acquises. Cette tendance est aussi visible dans d'autres pays francophones, notamment au Québec, où les « situations-problèmes » et la « résolution de problèmes » sont préconisés dans les programmes. En effet, l'entrée par les compétences dans les programmes québécois fait ressortir trois composantes : résoudre un problème, déployer un raisonnement, communiquer avec le langage mathématique. Cependant, la résolution de problèmes apparaît là plus comme une modalité pédagogique en situation d'apprentissage qu'un type de situation à part entière. Faut-il étudier le processus mobilisé dans de telles situations ou se concentrer davantage sur le savoir notionnel construit dans la résolution ? C'est une question difficile que pose également la lecture des programmes belges : ceux-ci par exemple n'ont pas tranché. Soulignons que dans ce cas particulier, il s'agit de construire un savoir dans les situations-problèmes alors apparentées aux situations adidactiques de Brousseau (Brousseau, 1998).

Mais revenons au processus de recherche lui-même : comment se caractérise la « démarche de recherche en mathématiques » ? Quelles compétences appelle-t-elle ? Quelles situations problématisent ce genre de démarche ? Quelle implémentation didactique est-il possible de faire ? Nous avons apporté des éléments de réponse à ces vastes questions au cours de trois ateliers proposés dans le cadre du congrès AMQ :

- Karine Godot : « *Maths à Modeler : des jeux pour apprendre à chercher en mathématiques dès le plus jeune âge* ».
- Léa Cartier : « *La chasse à la bête : une situation-recherche pour l'entrée dans la preuve* »
- Eva Knoll et Cécile Ouvrier-Buffet : « *Les situations-recherche pour la classe et la formation des enseignants* ».

1. La « démarche de recherche en mathématiques » : proposition de définition et caractérisation

En référence à Glaeser et Polya nous rassemblerons sous le terme « heuristiques » les caractéristiques de la démarche de recherche en mathématiques.

Heuristique : *Art de résoudre des problèmes mathématiques* (Polya, 1989).

Étude des méthodes spontanées ou non conduites par une personne confrontée à un problème (Glaeser, 1999, p.112).

Une situation problématique (qui n'est pas forcément énoncée en langage mathématique, ou restreinte à un seul problème) implique de se poser une question, d'étudier éventuellement un problème plus simple, de faire des essais, d'émettre des conjectures, de les réfuter ou de les valider, de prouver, de généraliser… C'est cet ensemble de composantes que nous qualifierons d'heuristiques.

La pratique du mathématicien est peu décrite. Nous nous sommes appuyées sur les travaux de Nimier d'une part (Nimier, 1989) et Burton (Burton, 1999) d'autre part, conduits à partir d'entretiens avec des mathématiciens sur leur discipline de prédilection. Il en ressort deux composantes propres à l'activité de recherche : une phase de recherche individuelle et une phase collective, ces deux phases pouvant aussi se développer conjointement selon Burton.
Intéressons-nous tout d'abord à la première. Quelle que soit leur spécialité en mathématiques, les chercheurs parlent de jeu, de plaisir, de persévérance, d'imagination et d'intuition ou d'*insight* (un aspect reconnu comme majeur selon Burton).
La dimension sociale de l'activité professionnelle du chercheur, apparaîtrait plutôt, quant à elle, dans un deuxième temps à travers les échanges entre collègues, l'aspect communication étant le terme du processus de recherche, une fois les avancées formalisées. Ces échanges font partie intégrante de la recherche, ils participent à son avancée, induisant échanges, dialogues, mise en débat. Soulignons que la phase de recherche et la phase de mise en commun et d'échanges avec des pairs ne sont pas séparées dans le temps mais s'imbriquent réellement. Le cliché du mathématicien enfermé dans son bureau est de nos jours révolu : le travail en collaboration est en effet à l'œuvre pour ainsi dire dès le début d'une recherche (Burton, 2004).

Nous considérerons donc que chercher en mathématiques, c'est se retrouver dans la peau d'un chercheur en mathématiques, s'interroger, essayer, tâtonner, observer, raisonner, émettre des conjectures, généraliser, prouver, s'accrocher, imaginer, trouver du plaisir, échanger avec autrui, partager ses découvertes, critiquer, argumenter...

Les programmes actuels français vont dans ce sens : du primaire à la fin du lycée, on retrouve des objectifs tels les heuristiques décrites ci-dessus.

2. Les programmes français actuels : un exemple d'attente institutionnelle de mise en œuvre d'une « démarche de recherche en mathématiques »

Par exemple, les instructions officielles préconisent (Bulletins officiels du Primaire, du Collège et du Lycée ; Godot, 2005, p. 62-63) :

- ce que l'enseignement des mathématiques doit permettre de développer :
  - au primaire : « Capacités à chercher, abstraire, raisonner, prouver »
  - au collège : « Pratiquer une démarche scientifique, chercher, observer »
  - au lycée : « Observation, abstraction, expérimentation, démonstration »
- de faire construire des conjectures :
  - au primaire : « Émettre des hypothèses et les tester – Faire et gérer des essais successifs »
  - au collège : « Énoncer des conjectures, les expérimenter »
  - au lycée : « Se poser des questions – Conjecturer un résultat »
- de faire travailler l'argumentation :
  - au primaire : « Argumenter à propos de la validité d'une solution produite par soi-même ou par un camarade »
  - au collège : « Construction d'une argumentation – Écoute des arguments d'autrui – Introduction progressive au raisonnement déductif »
  - au lycée : « Comprendre comment la question se résout dans des cas particuliers et en quoi les arguments valables se généralisent ou non » (1ère et Terminale)
- de rechercher des contre-exemples :
  - au primaire : « Élaborer une solution originale et en éprouver la validité »
  - au collège : « Recherche de contre-exemples »
  - au lycée : « Trouver d'éventuels contre-exemples »
- de vérifier, de contrôler ses résultats :
  - au primaire : « Contrôler et discuter la pertinence ou la vraisemblance d'une solution – Identifier des erreurs dans une solution en distinguant celles qui sont relatives au choix d'une procédure de celles qui interviennent dans sa mise en œuvre »
  - au collège : « Contrôle des résultats et évaluation de leur pertinence en fonction du problème étudié – Analyse critique »
  - au lycée : « Contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé »
- mais aussi, de développer l'imagination et la créativité :
  - au primaire : « Favoriser l'initiative, l'imagination et l'autonomie des élèves »
  - au collège : « Des qualités d'initiative, d'imagination et de créativité »
  - au lycée : « Capacités d'imagination et d'analyse critique » (2nde et 1ère)

Les heuristiques qui sont au cœur de l'activité du mathématicien sont ainsi mises en avant par ces programmes. Mais de quelles ressources pédagogiques disposent les enseignants pour les mettre en œuvre en classe ? Comment évaluer leur maîtrise par les élèves ? Comment peuvent-ils noter ou valider ces séances ? Nos recherches ont montré que très peu d'outils sont disponibles pour les enseignants. Quelques manuels proposent des problèmes pouvant permettre à l'élève d'accéder à une heuristique, mais la fermeture relative de ceux-ci nous semble faire obstacle au développement de telles compétences chez l'élève (voir en particulier Godot, 2005, p. 70-97).

Nous allons maintenant proposer un nouveau type de situations permettant effectivement de travailler la démarche de recherche. Nous entendons « nouveau » au regard de ce qui existe dans la littérature, c'est-à-dire le *problem-solving* (Schoenfeld, 1985), les situations-problèmes, les problèmes ouverts (Arsac, Germain et Mante, 1988) et les situations adidactiques (Brousseau, 1998). Nous montrerons comment ces « situations-recherche » que nous proposons répondent à la demande institutionnelle, c'est-à-dire en quoi elles permettent à l'élève de mobiliser une réelle activité de recherche, en référence à ce que fait le chercheur professionnel.

3. Les situations-recherche

Nos recherches s'articulent autour de situations que nous appelons ***situations-recherche***. Ce sont des situations didactiques particulières qui peuvent être considérées comme la transposition pour la classe de l'activité du chercheur en mathématiques telle que nous l'avons précédemment décrite. Nous les caractérisons ainsi :

- Le problème abordé est le plus souvent issu de problèmes de recherche actuels. Il peut donc comporter une, plusieurs ou aucune solution. Il peut être encore ouvert dans la recherche mathématique actuelle.
- Le point de départ est une question facilement compréhensible pour celui à qui elle est posée. Elle n'est pas formalisée en termes mathématiques. C'est la situation qui amène l'élève à l'intérieur des mathématiques.
- Les méthodes de résolution ne sont pas désignées. Plusieurs pistes peuvent être suivies.
- Les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et réduites possibles. Ainsi, le domaine conceptuel dans lequel se trouve le problème, même s'il n'est pas familier, est d'un accès facile pour que l'on puisse prendre facilement possession de la situation, s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution.
- Une question résolue peut amener à se poser de nouvelles questions. Il n'y a que des critères de fin locaux (Grenier et Payan, 2002 ; Godot, 2005).

Cette caractérisation n'est pas sans rappeler certains des éléments de définition des problèmes ouverts (Arsac, Germain et Mante, 1988) ou du *problem solving*.
On peut noter plusieurs points communs entre les situations-recherche et les problèmes ouverts : l'énoncé n'induit ni la méthode ni la solution, la solution n'est pas une application directe des résultats présentés en classe mais demeure tout de même accessible, et la résolution nécessite la mise en œuvre d'une démarche de recherche. Cependant, plusieurs différences existent.
Une situation-recherche peut avoir une, plusieurs ou aucune solution, contrairement à un problème ouvert ou au *problem solving* qui n'en ont généralement qu'une. De plus, les valeurs des variables de recherche ne sont pas fixées au préalable. Les ***variables de recherche*** sont des variables de tâches inhérentes à la situation-recherche, leurs valeurs permettent de caractériser les différents sous-problèmes de la situation et les procédures afférentes (Godot, 2005, p. 133). Enfin, dans une situation-recherche, il n'y a pas nécessairement de savoir mathématique notionnel visé ou à mobiliser. En effet, nous cherchons avant tout à mettre l'accent sur la démarche de recherche en elle-même : c'est pourquoi nous proposons des situations où les savoirs notionnels ne viennent pas faire obstacle au développement de la démarche de recherche.

4. Des situations-recherche et des heuristiques spécifiques

Les situations que nous proposons sont de plusieurs types : elles peuvent être liées à un travail plus spécifique sur une ou plusieurs heuristiques, impliquer des notions mathématiques données, appartenir à un ou plusieurs domaines mathématiques différents. Remarquons que la plupart des situations que nous avons conçues sont proches des mathématiques discrètes, un champ des mathématiques comportant de nombreux problèmes compréhensibles et encore ouverts dans la recherche. Remarquons que l'équipe dans laquelle s'inscrivent nos travaux, Maths à Modeler, est composée notamment de chercheurs en mathématiques discrètes, ce qui nous donne un accès privilégié aux recherches mathématiques en cours et à l'observation de la démarche du chercheur elle-même.
Indiquons quelques exemples de situations-recherche que nous avons développées au sein de Maths à Modeler et expérimentées auprès de différents publics :

- Une situation sur les pavages du plan par des polyminos permettant une alternative à l'apprentissage de la preuve est décrite dans (Grenier et Payan, 1998).
- Une situation autour de droites discrètes permet un travail tout particulier de l'heuristique « définir » (Ouvrier-Buffet, 2003 et 2006)
- Une situation nommée « roue aux couleurs » permet l'entrée dans une démarche de recherche en mathématiques et ce dès 8 ans (Godot, 2005).
- Un ensemble de situation pouvant être proposées comme situation-recherche sont accessibles sur le site de la valise de Maths à Modeler (http://www-leibniz.imag.fr/LAVALISE).

5. L'organisation des ateliers : vers la caractérisation de la gestion d'une situation-recherche

Nos hypothèses de travail, vérifiées expérimentalement à grande échelle dans plusieurs cadres (cadre scolaire, extra-scolaire, formation d'enseignants, animation scientifique, …) et donc auprès de publics différents, ont guidé les choix d'organisation des ateliers proposés lors du colloque de l'AMQ. Ainsi, l'organisation retenue pour les ateliers souligne les aspects les plus importants du type de gestion d'une situation-recherche.

Dans la gestion d'une situation-recherche, élèves et enseignants sont dans une situation différente de celle d'une classe habituelle. L'élève se retrouve en effet en position de « chercheur » mais aussi en situation de « gestionnaire » de sa propre recherche : c'est lui qui choisit et modifie les valeurs des variables de recherche, par exemple. Et l'enseignant « gestionnaire » est également en position de « chercheur » : il ne connaît pas forcément les pistes qui seront explorées par les élèves, les différentes stratégies qui pourront être mises en place, ni les réponses aux questions que les élèves auront eux-mêmes choisies.

Dans chaque atelier, les participants ont été confrontés directement aux problèmes mathématiques. Nous pensons en effet que la compréhension de la démarche de recherche et l'analyse de ce que feront les élèves dans cette situation passe par le fait d'être soi-même confronté au problème mathématique.
Le travail dans les ateliers a ainsi été organisé autour de petits groupes de 3 à 4 personnes, le travail en groupe permettant une dynamique particulière par les échanges qu'il suscite d'une part, et court-circuitant le découragement individuel d'autre part. Le gestionnaire de la situation (professeur, intervenant extérieur ou animateur scientifique) peut relancer la recherche ou inciter à la prise de

notes (en particulier auprès de jeunes enfants), mais n'induit en aucun cas les procédures et solutions.

Du matériel a été utilisé dans certains groupes des ateliers. L'utilisation de matériel peut modifier l'entrée dans la situation et la recherche même. La présence ou l'absence de ce matériel peut être une variable de la situation et ainsi influer sur le déroulement d'une séance.

Des synthèses collectives concernant la résolution mathématique ont également été organisées dans chaque atelier. Ces phases de synthèses nous semblent indispensables pour faire état de l'avancée des travaux dans les groupes, pour montrer la variété des stratégies développées, ainsi que les démarches de preuve. Différentes modalités peuvent être mobilisées pour ces synthèses, par exemple celle du débat scientifique (Legrand, 1993).

LA GRENOUILLE OU LES PETITS CAILLOUX

Karine Godot

Il s'agit de deux énoncés différents pour une même situation-recherche. Relevant des jeux de Nim, dont on doit la résolution dans les années 30 à Grundy (Grundy 1935) et Sprague (Sprague, 1935), cette situation est une version bien plus ouverte de la situation « Qui dira 20 ? » décrite par Brousseau (Brousseau, 1998). Comme plusieurs autres situations-recherche elle peut être proposée à différents niveaux scolaires. Dans le cadre de nos recherches, elle a été expérimentée auprès d'élèves de l'école primaire française de cycle 3 (9 à 11 ans) au cours d'un trimestre, à raison d'une heure hebdomadaire. Leurs recherches ont été finalisées par un séminaire dans les locaux de notre laboratoire en présence de chercheurs professionnels.

1. Énoncés

Les deux versions de cette même situation-recherche sont les suivantes :

Version « Les petits cailloux »
Deux joueurs ont devant eux un tas de petits cailloux (commun aux deux joueurs). Chacun leur tour, ils doivent prendre dans ce tas un nombre de cailloux choisi parmi plusieurs quantités qu'ils ont préalablement fixées ensemble. Celui qui ne peut plus jouer a perdu.
Vous devez fixer à l'avance le nombre total de cailloux et les différents nombres que chaque joueur a le droit de prendre. Si vous êtes le premier joueur, que devez vous faire pour être certain de gagner ?
Pour commencer, nous vous proposons d'essayer en décidant que chaque joueur ne pourra prendre que 1 ou 2 cailloux.

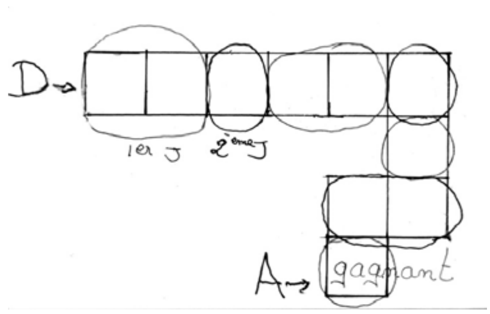
Version « La grenouille »
Deux joueurs à tour de rôle font sauter la grenouille d'une case à une autre. Chacun leur tour, ils doivent faire avancer la grenouille d'un nombre de cases choisi parmi plusieurs quantités qu'ils ont fixées ensemble préalablement. Le but du jeu est d'amener la grenouille sur la dernière case. Le joueur qui ne peut plus faire avancer la grenouille a perdu.
Vous devez fixer à l'avance le nombre total de cases et les longueurs des sauts de la grenouille. Si vous êtes le premier joueur, que devez vous faire pour être certain de gagner ?
Pour commencer, nous vous proposons d'essayer en décidant que la grenouille ne pourra faire que des sauts de longueur 1 ou 2.

2. Résolution mathématique

Les deux énoncés renvoient au même problème mathématique à condition de ne pas compter la case sur laquelle est la grenouille mais toujours le nombre de cases qui la précèdent.
Si l'on veut être sûr de gagner, il faut déterminer une stratégie gagnante, et savoir identifier quelles sont les situations gagnantes et les situations perdantes. Pour la résolution, nous nous limiterons au cas où les joueurs ont deux alternatives quant au nombre de cailloux à prendre ou de cases à sauter.

Prenons un exemple : considérons le cas où n, le nombre total de cailloux (respectivement de cases), est 10 et que l'on peut prendre 1 ou 2 cailloux (respectivement on peut avancer de une ou deux cases). Nous noterons ci-après ce sous-problème (1,2).

Si l’on joue au hasard, comme sur le schéma ci-dessous réalisé par des élèves de CM2 (11 ans), il est alors difficile de tirer des conclusions des différentes parties de jeu. Si l’on veut avancer dans la résolution du problème, il faut partir du principe que les deux joueurs « savent jouer » c’est-à-dire qu’ils possèdent tous deux une stratégie gagnante et qu’ils l’appliquent à chaque coup.

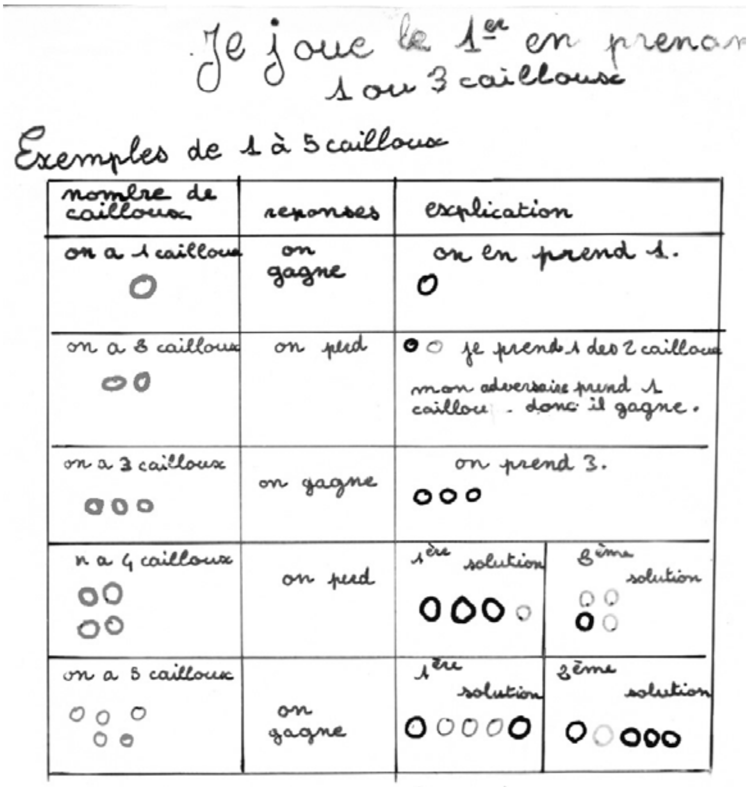


Après plusieurs parties, il apparaît alors expérimentalement que le premier joueur est gagnant quel que soit *n*, sous condition qu’il puisse choisir le nombre de cailloux ou de cases à prendre de façon à laisser à son adversaire un nombre de cases ou de cailloux qui soit un multiple de 3. En fait, il s’agit de faire « des paquets de trois ».

Ainsi, nous parvenons à la conjecture :

Dans le cas (1,2) :
Si le nombre de cases ou de cailloux est un multiple de 3, je ne commence pas.
Sinon, je commence et je prends des cailloux ou j’avance de façon à laisser à mon adversaire un nombre de cases ou de cailloux multiple de 3.
Dans les deux cas, si l’autre joueur prend un caillou (case), j’en prends deux et inversement.

Le même type de raisonnement peut être effectué pour les autres sous-problèmes, par exemple comme l’ont fait les élèves pour (2,3), (3,4), (1,3), (2,4), (2,5)… Á chaque fois, on parvient à identifier les situations gagnantes et perdantes et à déterminer une stratégie gagnante.



Je joue le 1er en prenant 1 ou 3 cailloux

Exemples de 1 à 5 cailloux

nombre de cailloux	reponses	explication	
on a 1 caillou	on gagne	on en prend 1.	
on a 2 cailloux	on perd	je prend 1 des 2 cailloux mon adversaire prend 1 caillou . donc il gagne.	
on a 3 cailloux	on gagne	on prend 3.	
n a 4 cailloux	on perd	1ère solution	2ème solution
on a 5 cailloux	on gagne	1ère solution	2ème solution

Cas (1,3), production des élèves de CM1 (10 ans)

Par exemple, pour le sous-problème (1,3), le cas $n = 2$ étant perdant, on aboutit à la conjecture :

Si c’est un nombre pair on perd et si c’est un nombre impair on gagne.

De façon générale, on aboutit au résultat suivant :

Dans le cas (p,q) où q>p.
Je regarde les situations perdantes lorsque n<q. Notons les n_i.
Si le nombre de cases ou de cailloux est :
soit un multiple de p+q

soit congru à n_i modulo (p+q) avec n_i <q
je ne commence pas.
Sinon, je commence et je prends des cailloux ou j'avance de façon à laisser à mon adversaire un nombre de cases ou de cailloux appartenant à un des deux cas précédents.

Pour (2,5), par exemple, on montre facilement que $n = 1$ et $n = 4$, sont des situations perdantes, les situations perdantes sont donc de la forme $7k$, $7k+1$ et $7k+4$ où k est un entier.

Montrons ce résultat.

$7k-2 = 7k-7+5 = 7(k-1) + 5$
$7k-5 = 7k-7+2 = 7(k-1)+ 2$

Or les situations où il ne reste que 2 ou 5 cailloux (cases) sont gagnantes donc les situations 7k sont perdantes.

De même, $7k+1-2 = 7k-1 = 7k-7+6 = 7(k-1)+6$ et $7k+1-5 = 7k-4 = 7k-7+3 = 7(k-1)+3$ et les situations où il ne reste que 6 ou 3 cailloux (cases)sont gagnantes donc les situations $7k+1$ sont perdantes.

Enfin, $7k+4-2 = 7k+2 = 7k-7+5 = 7(k-1)+5$ et $7k+4-5 = 7k-1 = 7k-7+6 = 7(k-1)+6$, ce qui prouve que les situations $7k+4$ sont perdantes, compte tenu du fait que $n = 5$ et $n = 6$ sont des situations gagnantes.

On procède de même pour les situations gagnantes, en montrant qu'elles ramènent à des situations perdantes. Par exemple, $7k+3 = 7k+7-4 = 7(k+1)-4$ et $n = 4$ est une situation perdante.

3. Analyse didactique

Au regard de la lecture de l'énoncé et de la résolution mathématique, deux *variables de recherche* apparaissent : le couple (p,q) correspondant aux choix relatifs au nombre de cases ou de cailloux à choisir, et n, le nombre total de cases ou de cailloux. Le choix de leurs valeurs est à la charge des élèves. Ces valeurs conduisent à des conjectures différentes, propres à l'identification des situations gagnantes et perdantes pour chaque sous-problème ainsi qu'à la stratégie de jeu à adopter, qui dépend de n, pour chaque (p,q).

Pour jouer, il suffit de savoir compter. Dès le cycle 3, les élèves peuvent donc a priori avancer dans la résolution du problème. Bien entendu, les notions de congruence ou de division euclidienne peuvent être utiles mais elles ne sont pas nécessaires. Les jeunes élèves peuvent avoir recours aux notions de multiples, ou de paquets, et de restes.

Lors de la dévolution du problème, une difficulté peut apparaître, liée au postulat de départ : « les deux joueurs ont tous les deux à l'esprit une stratégie gagnante ». Celui-ci permet d'avancer dans la résolution du problème mais ne va pas de soi. Il est donc important de convenir avec les élèves de ce postulat pour qu'ils en comprennent la raison et se l'approprient. Une fois tout le monde d'accord, en route pour la recherche ! Essais, erreurs, recherche de généralisation, conjecture, contre-exemples, recherche de preuves, recherche de notation… Notation qui n'est pas spontanée chez les élèves. Pour les inciter à prendre des notes, nos travaux ont montré qu'il est important de finaliser la recherche par une phase de communication (séminaire ou autre).

Lors de nos expérimentations et de l'atelier que nous avons proposé à AMQ, nous avons choisi pour ces deux situations de fournir un support matériel : des petits cailloux (ou assimilé) ou des feuilles blanches pour dessiner le chemin de la grenouille.

4. Production des participants

Sept joueurs d'horizons divers ont participé à l'atelier : enseignants, chercheurs, étudiants, formateurs. Nous avons fait deux groupes : l'un a cherché sur le problème des petits cailloux, l'autre, sur celui de la grenouille.
Le premier a beaucoup joué avec les jetons. Il en a pris beaucoup au départ puis moins afin de pouvoir voir ce qu'il se passait, jetons qu'il rangeait en lignes de 3 ou 4, « afin d'y voir plus clair ». On retrouve un des apprentissages que nous avons supposé être induit par la pratique de situations-recherche : étudier des cas plus simples. En effet, contrairement aux participants de l'atelier, cette simplification n'est pas spontanée chez les élèves. Ils choisissent généralement de commencer par « beaucoup, beaucoup », l'étude de petits cas ne venant qu'ensuite, et devant souvent être suggérée par le gestionnaire. Les trois membres de ce groupe ont d'abord étudié le cas (1,2) comme le proposait l'énoncé puis (1,3), (1,4), (1,5)… sous-problèmes pour lesquels ils ont abouti à une conjecture quant aux situations gagnantes et perdantes puis ont cherché à généraliser pour $(1,p)$, avant que je ne les incite à étudier le cas (2,3). Á chaque fois, ils jouaient ensemble, et, comme je l'avais observé chez les élèves, ils ont pris très peu de notes, jusqu'à ce que je leur demande de préparer un bilan de leur recherche pour l'autre groupe.

Le groupe qui s'est intéressé à la grenouille a procédé différemment. Tout d'abord, contrairement aux élèves et à l'autre groupe, il n'a cherché que sur le support papier-crayon et n'a pas joué. Chaque membre cherchait de son côté puis ils mettaient en commun leurs résultats. Ensuite, leur étude a été progressive. Pour (1,2), ils ont fait varier n, le nombre de cases, et ont étudié, $n = 1, 2, 3, 4$… Une fois la conjecture sur les multiples de 3 établie, ce groupe a cherché (2,3) puis (1,3).
Faute de temps, les deux groupes n'ont pas pu rechercher des preuves formelles de leurs résultats, restés donc, comme pour la majorité des élèves, au statut de conjecture, statut d'un énoncé mathématique bien peu souvent rencontré dans l'enseignement en France alors que l'établissement de conjectures est un élément moteur de la recherche en mathématiques. Le faire découvrir aux élèves, quel que soit leur niveau scolaire, nous semble donc particulièrement important.
Comme nous l'avions remarqué dans les classes, la formulation de l'énoncé induit des stratégies différentes et des dissemblances quant au recours au support papier-crayon. *Les petits cailloux* induisent plus aisément le recours à la notion de paquets, *la grenouille* incite à prendre des notes.
Les sept joueurs étaient enthousiastes, je n'arrivais plus à les arrêter afin d'avoir le temps de faire une synthèse et de leur montrer ce qu'ont fait les élèves de cycle 3. Dans les couloirs ensuite, ils parlaient encore de conjectures. Lors de la discussion finale, ils ont tous vu l'intérêt de proposer ce type de situations aux élèves, le fait que cela donne du sens à la notion de congruence a été apprécié par les enseignants de lycée ou du supérieur, tous ont perçu la richesse de la situation, liée à l'ouverture de l'énoncé, aux concepts heuristiques mis en jeu et au fait que même de jeunes élèves puissent se lancer dans la recherche et énoncer des conjectures.

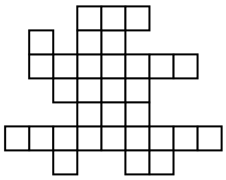
LA CHASSE Á LA BÊTE

Léa Cartier

La « chasse à la bête » est une situation développée par l'équipe Maths à Modeler. Elle est issue d'un problème de mathématiques discrètes : l'exclusion des polyminos. Nous décrirons cette situation et présenterons les résultats d'une classe française de $6^{ème}$ (élèves âgés de 11 à 12 ans). Nous conclurons sur l'atelier présenté au congrès AMQ.

1. Présentation du problème mathématique

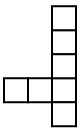
Le problème général, dont est issue la « chasse à la bête », se présente ainsi : on dispose d'un morceau de grille discrète et d'une taille de polyminos à exclure (se référer à Golomb 1994 pour trouver d'autres types de problèmes de même nature). Par exemple, on cherche à exclure tous les polyminos de taille 4 dans la grille suivante :



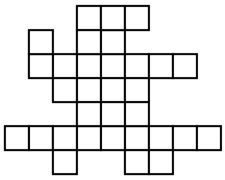
Pour résoudre ce problème nous allons donc devoir choisir des cases de telle façon à ne pas conserver 4 cases contiguës, ce qui exclue, de fait, les 4 tétraminos. L'intérêt du problème réside dans la minimisation de ce nombre de cases exclues.

Pour que ce problème soit plus facilement dévoluable nous avons choisi de le transformer en choisissant un polymino particulier à exclure, ce polymino sera « la bête ». Le problème est alors la recherche du plus petit nombre d'obstacles à poser sur le territoire pour que la « bête » ne puisse pas s'y poser. Prenons un exemple :

La bête :

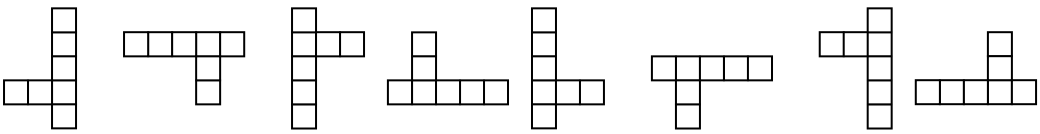


Le territoire :

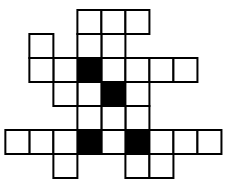


Précisons que les rotations et symétries de la bête sont autorisées :

Les positions possibles de la bête :



Comment choisir des cases du territoire de telle manière que la bête ne puisse s'y poser ? Voici une façon de procéder :



Nous avons donc une solution à notre problème comportant quatre obstacles. Cette solution est-elle optimale ? Comment le prouver ? Toutes ces questions sont celles posées aux élèves dans des cas plus ou moins particularisés que nous développerons ci-après.

2. Présentation du problème proposé aux élèves et organisation des séances

Selon l'âge des élèves, le problème peut être adapté. Il est possible de le « fermer » plus ou moins par le choix des bêtes et/ou le choix des territoires. Nous présenterons ici le problème tel qu'il a été proposé à des élèves de sixième disposant d'environ 6 heures de recherche sur 4 séances.

La première séance a été consacrée à la présentation du problème. Le premier cas résolu a été celui de la bête à une case. Du matériel composé d'un territoire carré de 8 cases par 8 cases et d'obstacles leur a ensuite été fourni et chaque groupe a choisi sa propre bête constituée de 4 à 6 cases.
Dès la deuxième séance le territoire a été fixé à 5 par 5, la première bête étudiée étant le domino, la deuxième le trimino long, puis le trimino en L. Le matériel composé du territoire, de la bête et d'obstacles a été à leur disposition à chacune de ces séances.

La classe dans laquelle le problème a été proposé développait un projet particulier entre le français et les mathématiques. Le projet principal était le montage d'une pièce de théâtre (Guedj, 2001). La recherche du problème de la chasse à la bête s'est conclue par la présentation du résultat de leur recherche lors d'un séminaire dans notre laboratoire et ce auprès de chercheurs en mathématiques discrètes, d'élèves d'autres établissements et de leurs parents. Les extraits de leurs travaux qui vous seront présentés dans cet article sont issus des transparents qu'ils ont élaborés en vue de cette présentation.
Les séances de recherche étaient animées par un chercheur en mathématiques discrètes et membre de l'équipe Maths à Modeler, les professeures de français et de mathématiques étant présentes, ainsi que moi-même. Les élèves étaient organisés en groupes de 3, et chacun notait les résultats et les pistes suivies lors de la recherche. Chaque séance a comporté une phase de mise en commun d'au moins 20 minutes, cette phase permettant de montrer à chaque groupe ce qui s'était fait dans les autres groupes. La motivation des élèves et pour la recherche, et pour la prise de note, et pour la compréhension de ce qui était avancé dans la classe, n'a pas posé de problème, l'enjeu ne leur étant sûrement pas indifférent.

3. Des stratégies de résolution

Ce problème nécessite a priori peu de pré-requis mathématiques spécifiques. Cependant, les raisonnements qui devront être mis en œuvre sont riches et peuvent se déployer dans différentes directions, telles les suivantes :

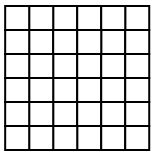
Stratégies de base : deux stratégies de recherche de solutions par tâtonnement existent.
On peut commencer par couvrir le territoire d'obstacles, sachant que c'est une solution, et les enlever petit à petit pour se rapprocher de la solution optimale.
On peut chercher au contraire à poser dès le départ le moins d'obstacles possibles, et se rapprocher d'une solution.
Des stratégies mixtes entre ces deux premières façons de procéder peuvent être imaginées : on cherche une première solution que l'on améliore de façon à se rapprocher d'une solution optimale.
Les stratégies par tâtonnement ne fournissant pas de preuve de l'optimalité des solutions on peut

s’attendre à d’autres façons de procéder intégrant des justifications de la démarche d’établissement de solution.

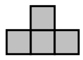
Stratégie par forçage

Les solutions peuvent être établies par forçage : on considère une case particulière et on regarde comment elle peut être occupée par une bête. On dispose alors l’obstacle en fonction de cette occupation potentielle. En voici un exemple sur un territoire de 6 par 6, et d’une bête à 4 cases :

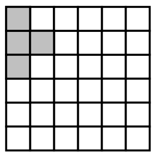
Le territoire :



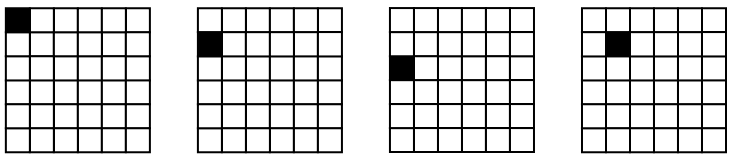
La bête :



Choisissons de regarder la case du coin en haut à gauche. Elle peut être occupée par une bête de 2 façons, mais ces deux dispositions sont en fait symétriques. On peut se contenter de n’en considérer qu’une :



Pour empêcher la bête d’être dans cette position, il nous faut mettre au moins un obstacle. Quatre positions sont possibles :



Les $2^{ème}$ et $3^{ème}$ dispositions peuvent sembler peu intéressantes dans la mesure où elles n’empêchent pas la « bête symétrique » de se poser. On peut alors considérer soit ces 4 configurations, soit les deux dispositions restantes, et recommencer le raisonnement pour la case suivante.

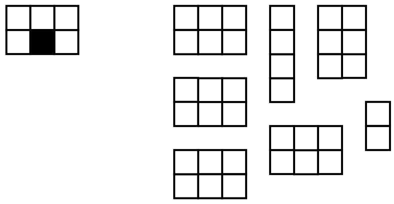
Selon la configuration de la bête, la stratégie dite de forçage donnera un réel forçage ou non. Si l’on considère le domino par exemple, une fois le premier choix effectué, tous les autres en découlent.

Stratégie par découpage/pavage

Cette stratégie peut être, soit un pavage du plan par la bête, soit un découpage matériel du territoire par une forme appropriée.

Utiliser cette stratégie nécessite le raisonnement suivant : pour empêcher la bête de telle forme de se poser, il est nécessaire que toutes ces formes-là soient exclues. En particulier, si on arrive à paver le territoire avec n bêtes, alors n obstacles sont nécessaires. De façon plus générale, si on a montré qu’une forme donnée nécessite p obstacles pour empêcher la bête de se poser et que le territoire à notre disposition peut être pavé par q fois cette forme, alors une solution optimale comportera au moins pq obstacles.

Par exemple, avec la forme précédente, un territoire de 2 par 3 nécessitant au moins un obstacle, on cherche à découper le territoire de 6 par 6 en morceaux de 2 par 3 :



Ce découpage nous assure que la solution optimale comportera 5 obstacles **au moins**.
Si on trouve une solution comportant 5 obstacles, **alors** elle sera optimale.

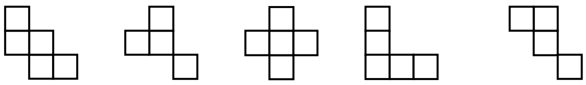
La stratégie par pavage peut permettre de construire des solutions, elle pourra être associée à la stratégie par forçage, les justifications pouvant venir de chacune des stratégies.

Autres stratégies
D'autres stratégies existent, en particulier des méthodes mixtes entre celles décrites ci-dessus. Une stratégie de recherche de solutions par identification des bords a été mise en œuvre dans l'un des groupes de l'atelier AMQ, stratégie qui pourrait s'avérer directement utilisable sur les territoires toriques proposés dans la valise de Maths à Modeler (http://www-leibniz.imag.fr/LAVALISE/bete2/bete8.htm).

4. Ce que l'on peut attendre de la situation en classe

La chasse à la bête a montré lors des séances observées toute sa richesse. Nous sommes bien conscients que la mise en œuvre particulière de la situation avec deux intervenants extérieurs, deux professeures, et un séminaire à l'intérieur d'un laboratoire a joué, et ce à plusieurs niveaux, dans la réalisation de la recherche. Malgré ce possible bémol, et étant donné que la situation a été testée à plusieurs reprises et dans des conditions plus « standards », nous considérons que les résultats obtenus peuvent être attendus dans un contexte « classique » de recherche en classe.

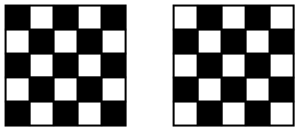
Le choix par les élèves de leur propre bête est une étape décisive dans la dévolution du problème. Dans la classe sur les 9 groupes tous ont choisi des bêtes de formes différentes. En voici quelques unes, remarquez que certaines ne sont pas connexes par les côtés :



Le fait que certains groupes trouvent des solutions de faible cardinalité a motivé les autres à chercher de meilleures solutions. La nécessité de passer à des problèmes plus petits a été rapidement soulevée dans la classe, personne ne réussissant à trouver de preuves de l'optimalité de sa solution. L'étude du domino a alors été la proposition d'un groupe pour la simplification du problème. En tant que gestionnaires de la situation, nous avons utilisé cette proposition et fixé la taille du territoire à 5 par 5.

Le travail sur le domino représente la phase la plus délicate de l'ensemble des séances. En effet, lors de cette séance, les stratégies de forçage et de pavage sont apparues simultanément dans quelques groupes. Une première mise en commun a eu lieu. Elle a permis de mettre en lumière une propriété forte, qu'il est nécessaire de « désamorcer » rapidement, à savoir: « Ma solution est optimale, car si j'enlève un seul obstacle alors ce n'est plus une solution ». C'est en particulier à cause de cette propriété que nous avons choisi un territoire de taille impaire : dans le cas du domino, il existe une solution à 13 obstacles telle que si l'on enlève un obstacle ce n'est plus une solution. Pourtant il existe une solution à 12 obstacles :

La bête

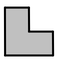


Les stratégies par forçage et par découpage ont été proposées lors d'une seconde mise en commun, par les groupes les ayant utilisées. La compréhension de la technique de pavage est délicate : certains élèves restent au niveau du matériel et ne comprennent pas l'apparition d'un « nouveau » problème, dual, qui est celui du pavage. La présentation qui a emporté la conviction des derniers incrédules est celle–ci : « Des bêtes sont déjà posées sur mon territoire. Pour les chasser, je devrais utiliser au moins un obstacle par bête. Donc il me faudra au moins autant d'obstacles que l'on peut poser de bêtes sur le plateau. J'ai réussi à poser 12 bêtes, donc il me faut au moins 12 obstacles. J'ai une solution avec 12 obstacles, je ne peux pas faire mieux ».

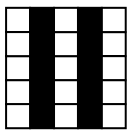
Pour le trimino long, le problème est du même type : les élèves trouvent une solution avec 8 obstacles. Les questions sont alors : cette solution est-elle unique ? Peut-on le prouver ? Le fait de trouver un pavage du territoire avec 8 bêtes conduit à la conclusion suivante : la solution est optimale.
Cette phase de recherche nous a permis de vérifier que le problème était bien assimilé par les élèves : les raisonnements utilisés pour le domino peuvent être intégralement réinvestis, et ils l'ont été. La difficulté principale a été de trouver une solution à 8 obstacles et un pavage à 8 triminos.

Le problème se complexifie avec le trimino en L, les élèves ayant trouvé une solution à 10 obstacles et un pavage à 8 bêtes :

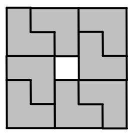
La bête :



Une solution :



Un pavage :

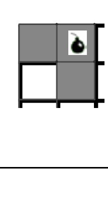


Je vous propose ici un extrait de leur travail. Seules les couleurs ne sont pas conservées, chaque cadre correspond à un de leur transparent, le passage entre crochets résume les coupes du texte original : les élèves ont nommés les obstacles « mines ».

Une solution à 10 mines …
mais 8 bêtes maximum ???

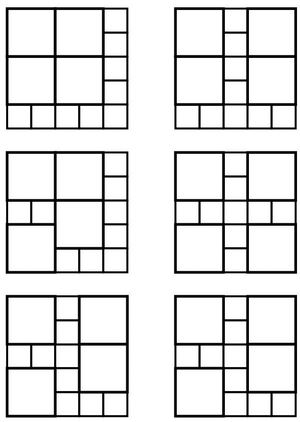
Le nombre de mines est compris entre 8 et 10.

On simplifie le problème.

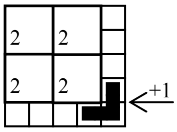


Sur un territoire
de 2 sur 2,
il nous faut
minimum 2 mines.

Sur notre territoire,
on peut poser 4 territoires de 2 sur 2



Maintenant,
comptons les mines nécessaires.

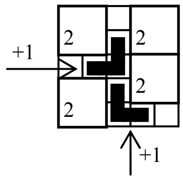


Ici, il faudra 9 mines.

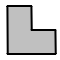
Le nombre minimum de mines
n'est donc pas 8.

[Les élèves procèdent ainsi pour 6 autres découpages et montrent pour chacun que 9 mines sont nécessaires]

Mais, avec la dernière disposition



Le nombre minimum de mines
n'est donc pas 9.

Il faut 10 mines au minimum
pour que la bête 

ne s'installe pas
sur le territoire de 5 sur 5.

5. Production des participants

L'atelier « chasse à la bête » a permis de proposer cette situation à une dizaine de participants. Dans chacun des trois groupes, une grille 5 par 5, ainsi que des obstacles et trois types de bêtes leur ont été fournis. Le problème a été réduit (étant donné le temps imparti) à la recherche sur le 5 par 5. Le questionnement comportait un versant mathématique et un versant didactique :

- <u>Résolution du problème</u> : Pour chacune des bêtes trouver les solutions optimales et montrer qu'elles le sont.
- <u>Si un tel travail est proposé en classe</u> :
  - Quels sont les apprentissages en jeu dans le problème ?
  - Quelles notions sont abordées ?
  - Á quelles difficultés des élèves peut-on s'attendre ? Comment les dépasser ?

Comme l'analyse mathématique le laissait attendre, les stratégies mises en place par les participants ont été du même type que celles des élèves, souvent plus élaborées ou comportant des connaissances préalables sur le pavage par exemple. C'est surtout la rapidité de leur déploiement qui varie. Dans les trois groupes, la recherche s'est surtout axée sur la recherche de solutions, et de méthodes de recherche de ces solutions. Les stratégies mises en œuvre étaient complexes, je ne donnerai donc dans ce qui suit que les orientations de chaque groupe. Le premier groupe a plutôt utilisé des méthodes par tâtonnement, et cherché à argumenter de la pertinence des solutions trouvées. Le deuxième a mis en œuvre des méthodes mixtes basées sur le forçage. Le troisième a cherché à générer des solutions par identification des bords, puis par suppression des obstacles « en trop » pour chaque configuration.
La mise en commun qui a suivi a permis de discuter en particulier de l'implémentation en classe d'une telle situation. L'un des arguments objecté à la mise en place de situations-recherche en classe est le temps nécessaire à de telles situations. Il convient d'insister sur le fait que nous ne préconisons pas que tout apprentissage mathématique doive se faire par ce type de situations. D'autre part nous avons montré comment les instructions officielles préconisent un travail de recherche qui peut être mis en œuvre en classe par les situations-recherche. Parallèlement, nous n'ignorons pas les contraintes institutionnelles fortes qui peuvent détourner un enseignant de ces situations qui demandent du temps. C'est pourquoi il nous semble important que l'institution, en

cohérence avec ses attentes, intègre un temps dédié à ce travail de recherche en classe. Apprendre à chercher sera utile dans la classe pour les autres temps de travail en groupe, ainsi que sur le temps de travail individuel.
Pour conclure, et comme lors de cet atelier, je redonne la parole aux élèves et reprends leur conclusion sur ce qu'ils ont appris lors de ce travail de recherche :

Nous avons commencé à apprendre à :

Travailler ensemble
Écouter un peu mieux les autres

Ne pas dire tout de suite « c'est impossible »

Simplifier un problème pour mieux l'étudier

Essayer de trouver des preuves
des arguments

Discuter de ces preuves avec d'autres

Comprendre des fautes de raisonnement

LE PROBLEME DE FROBENIUS

Eva Knoll et Cécile Ouvrier-Buffet

Le savoir scientifique se construit dans le domaine de la recherche. C'est au type de pratiques propres au chercheur que nous souhaitons confronter l'élève : là est véritablement l'enjeu des situations-recherche. Nous allons, dans cette partie, prendre un problème venu tout droit de la recherche mathématique et montrer ce qu'il peut en advenir en classe. La transposition d'un problème issu de la recherche est effectivement un point crucial non traité par les travaux didactiques portant sur les « situations de recherche » (expression utilisée dans une très large acception).

1. Présentation du problème

Il s'agit du problème fameux de Frobenius (1849-1917), énoncé en ces termes : soient $n_1,\dots,n_k$, des entiers positifs premiers entre eux. Trouver le plus grand entier naturel (appelé nombre de Frobenius) qui soit non atteignable (on dit *non représentable*) par combinaison entière positive de $n_1,\dots,n_k$. Le problème est encore aujourd'hui ouvert pour $k > 4$ (cf. Ramirez Alfonsin, 2005).

Nous avons utilisé pour l'atelier une version simplifiée du problème de Frobenius : si les valeurs nominales des pièces en usage dans un système monétaire sont de n_1, n_2,..., n_k, quelles sommes sont payables exactement dans ce système ?

Des questions de nature mathématique et didactique ont été soumises aux participants une fois la dévolution du problème effectuée :

- Décrivez votre démarche de résolution
- Quelles sont les questions mathématiques que pose ce problème ?
- Quelle(s) utilisation(s) en classe et en formation des enseignants voyez-vous pour ce problème particulier ?

2. Résolution mathématique

2.1. Étude d'un petit cas : k=2

La résolution mathématique du problème de Frobenius est relativement simple dans le cas où $k = 2$. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème : si p et q sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors le plus grand entier non représentable par combinaisons entières positives de p et de q est : $pq - p - q$.

Preuve

Puisque p et q sont premiers entre eux, p peut s'écrire : $p = xp + yq$ où x et y sont des entiers relatifs.

Dans ce cas, p peut être représenté de plusieurs façons. Sa représentation devient unique si l'on impose $0 \leq x < q$.

Alors, p est représentable si $y \geq 0$ et n'est pas représentable si $y < 0$.

Donc le plus grand entier non représentable par combinaisons entières positives de p et de q est : $(q-1)\,p + (-1)\,q = pq - p - q$

Nous renvoyons le lecteur à Ramirez-Alfonsin pour les preuves (particulièrement difficiles et délicates) pour $k = 3, 4$. Le lecteur pourra aussi faire des essais sur une applet disponible en ligne (http://www.math.uu.nl/people/beukers/frobenius/index.html).

2.2. Aspects mathématiques qui font du problème de Frobenius une Situation-Recherche

Si nous reprenons les éléments de caractérisation d'une situation-recherche décrits précédemment, il apparaît clairement que le problème de Frobenius remplit les différents critères : il s'agit en effet d'un problème facilement accessible, encore partiellement ouvert dans la recherche mathématique, pour lequel des stratégies initiales existent effectivement, où des questions mathématiques se posent (nous allons montrer ceci ci-après) et où l'élève peut choisir ses propres variables de recherche.

Considérons le problème de Frobenius expérimentalement.
Prenons quelques valeurs distinctes (deux ou trois) pour les pièces de monnaie et regardons quelles sont les valeurs atteintes. Si nous ne prenons que des valeurs paires par exemple, la régularité des valeurs atteintes apparaît de manière quasi évidente. Il en va de même pour des cas particuliers impliquant des multiples. Considérons alors des cas non « triviaux », à savoir : des entiers premiers entre eux.
Un phénomène (nous pourrions parler ici de *fait expérimental*) se dégage rapidement : il existe des trous « au début » et à partir d'une certaine valeur, tous les entiers sont alors atteints. Le nombre de Frobenius est la plus grande valeur entière non atteinte. Mais ce qui est remarquable là, c'est de s'interroger sur ces « trous ». Sont-ils caractérisables ? Répondent-ils à une régularité ? Justement, la réponse est non, et là réside toute la profondeur de ce problème. Cependant, le travail de conjectures sur des cas simples s'avère possible, tout comme l'élaboration de théorèmes locaux, et ceci caractérise ce problème comme étant une situation-recherche.

Prenons à titre d'illustration deux exemples et représentons les nombres atteints afin d'observer les « trous » :

- **Exemple 1** : les valeurs des pièces sont 5, 8 et 11.
Les nombres atteints sont : 5, 8, 10, 11, 13, 15, 16. Á partir de 18, tous les entiers sont atteints. Le dernier « trou » est donc **17**.

- **Exemple 2** : les valeurs des pièces sont 9 et 11.
Les nombres atteints sont : 9, 11, 18, 20, 22, 27, 29, 31, 33, 36, 38, 40, 42, 44, 45, 47, 49, 51, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78. Á partir de 80, tous les entiers sont atteints. Le dernier « trou » est ici **79**.

Ces deux exemples illustrent bien la « variabilité » du phénomène et les questions qui découlent de l'observation des « trous ». Encore faut-il reconnaître qu'une question est véritablement une question : cela apparaît véritablement comme une heuristique propre au chercheur.

3. Production des participants – Implications didactiques

Dans le cadre de cet atelier, quatre groupes allant de deux à trois participants ont travaillé sur la résolution mathématique du problème de Frobenius. Le débat a rapidement porté, dans certains groupes, sur l'interprétation à donner du « système monétaire ». L'aspect concret de la situation a conduit aux questions suivantes : utilise-t-on un système monétaire existant ? Et dans ce cas, est-il possible, ou acceptable, de rendre la monnaie ?
Par ailleurs, soulignons que l'habillage de l'énoncé posé aux participants contient un certain formalisme dans la notation utilisée, étant donnée la présentation générale du problème. Cet usage du symbolisme suggéra, à un groupe notamment, une méthode algébrique consistant en l'élaboration d'une formule de combinaison linéaire, couvrant ainsi effectivement tous les cas possibles. Une telle solution, qui se veut complète et la plus générale possible, peut ensuite servir pour calculer n'importe quel cas particulier, sans pour autant mettre en valeur une possible structure de l'espace mathématique généré par la problématique de départ. Elle ne dit en fait « rien » sur la nature des solutions. Or, comme nous l'avons souligné dans la présentation mathématique, c'est bien la répartition des nombres atteints qui est remarquable et qui soulève de réelles questions mathématiques. Cela étant, ce phénomène nous amène à l'interrogation suivante : à quoi reconnaît-on une solution ?

Il s'agit bien de négocier la transposition didactique de ce problème de recherche. Le propre d'une situation-recherche, dans sa gestion en classe, est bien de placer l'élève en situation de chercheur et de propre gestionnaire de sa recherche. L'enseignant quant à lui se retrouve aussi en posture de chercheur, il n'est pas détenteur du savoir. L'habillage peut donc effectivement apparaître comme problématique mais, in fine, il n'en est rien. L' « épurement » d'un problème, l'établissement de questions, voire la modélisation intra-mathématique font partie intégrante de la démarche de recherche.

Au delà des questionnements initiaux décrits ci-dessus, la plupart des groupes sont passés à l'expérimentation sur des exemples, choisissant au moins une combinaison particulière et explorant les possibilités résultantes. Ces explorations ont, dans la plupart des cas, permis des conjectures sur l'existence de valeurs atteignables ou non, amenant des questions de maximum non-atteignable et de prédiction.

Grâce aux questions didactiques mises en place dès le début de la session, plusieurs groupes ont débattu de thèmes plus théoriques en parallèle de la résolution même du problème. Au-delà de l'importance de l'habillage de l'énoncé décrit plus haut, ces discussions concernaient par exemple l'applicabilité de l'activité en classe à différents niveaux scolaires, particulièrement pour ce qui se rapporte à l'engagement des étudiants et à la perception de la facilité/difficulté du problème de départ.

Les possibilités de reformulations du problème ont aussi été explorées. Un groupe, par exemple, a reformulé la question de la façon suivante : qu'arriverait-il si on fixait le nombre à générer et variait les pièces en usage ? Bien que cette nouvelle question puisse sembler triviale (il suffit d'avoir une pièce de 1 pour toujours pouvoir produire la somme voulue), ce genre de questionnement peut prendre une valeur didactique puisqu'il engage à une réflexion sur la qualité de la question de départ. En effet, la situation de départ étant ouverte, elle permet une appropriation de la problématique par les participants : à eux de poser les « bonnes » questions pour l'avancée dans la résolution.

CONCLUSION

Nous avons montré, au travers de trois exemples de situations, plusieurs des spécificités des situations-recherche. Au niveau mathématique, il s'agit de transposer dans la classe de réelles situations de recherche, parfois encore ouvertes mathématiquement. Cette transposition peut être une simplification du problème initial comportant une dimension ludique véhiculant un enjeu pour l'élève (chasse à la bête, Léa Cartier) ou une non simplification (problème de Frobenius, Eva Knoll et Cécile Ouvrier-Buffet). Dans le cas des petits cailloux et de la chasse à la bête, le support matériel, à la disposition des élèves, permet une implémentation de ce genre de situations en classe dès le primaire.
Un certain champ des mathématiques, celui de la théorie des jeux, semble apporter quant à lui des situations pouvant être directement posées en classe (jeux de Nim, Karine Godot). Cependant, notre objectif étant d'impliquer les élèves dans une démarche de chercheur, nous ne nous limitons pas à cela. Les deux situations présentées par Karine Godot font apparaître une nouvelle heuristique : reconnaître que deux problèmes, issus de contextes différents, sont en réalité les mêmes. L'histoire des mathématiques nous montre combien la reconnaissance d'invariants a permis l'émergence de nouveaux concepts.

Au niveau didactique, les situations-recherche requièrent des conditions particulières de gestion en classe. Il s'agit en effet d'organiser une prise de notes pour les plus jeunes en particulier.
Un exemple d'organisation pédagogique et didactique utilise cela : la *narration de recherche*. Elle est susceptible de permettre l'observation et la valorisation du travail d'un élève en situation de recherche. Un groupe de recherche de Montpellier définit la narration de recherche ainsi : « l'exposé détaillé, écrit par l'élève lui-même de la suite des activités qu'il met en œuvre lors de la recherche des solutions d'un problème » (http://www.mathadoc.com/chapitre.php?chap=432). Il est aussi possible de trouver des résultats didactiques sur l'usage des narrations de recherche (http://www.math.jussieu.fr/~leidwang/wwwIREM/GroupeIrem3.htm et ouvrage collectif du groupe ZEP-REP de l'IREM de Paris 7, 2002).
Dans le cas spécifique des situations-recherche de Maths à Modeler, les notes représentent la mémoire du groupe sur l'état de leur recherche et seront utilisées en particulier lors de la communication ultérieure des résultats. Elles ne sont a priori **pas** destinées à l'enseignant. Insistons enfin sur le point suivant : la finalisation de la recherche des élèves par un séminaire ou par la création d'un poster s'avère en effet fondamentale.

Pour que l'apprentissage des heuristiques soit effectif, une pratique régulière se révèle nécessaire. Se pose alors la question de l'institutionnalisation de ces nouvelles compétences, dans le double objectif de répondre à la demande conjointe des enseignants qui enseignent et des élèves qui apprennent, mais aussi de rendre disponibles et mobilisables ces heuristiques, dans tout type de situations, qu'il s'agisse alors de nouvelles situations-recherche ou de situations-problèmes.
En cela, la formation des enseignants vient au cœur de la discussion : l'entrée par les situations-recherche est tout à la fois une nouvelle voie pour explorer la démarche de recherche, mathématiquement et didactiquement, mais aussi un moyen de requestionner l'intitulé « résolution de problèmes ».
Cette recherche est en cours. Nous espérons avoir montré dans cet article les perspectives didactiques nouvelles offertes par les situations-recherche.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSAC G., GERMAIN G. et MANTE M. (1988) *Problème ouvert et situation-problème.* IREM de Lyon.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

BURTON L. (1999) *The practices of mathematicians: what do they tell us about coming to know mathematics?* Educational Studies in Mathematics, 37 (2), 121-143.

BURTON L. (2004) *Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning Mathematics*. London: Kluwer Academic Publishers.

GLAESER G. (1999) *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*. Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

GODOT K. (2005) *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation – Exemple de la roue aux couleurs*, thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier, Grenoble.

GOLOMB S.W. (1994) *Polyominoes – Puzzles, Patterns, Problems and Packings*. Princeton Science Library, Princeton, NJ.

GRENIER D., PAYAN C. (1998), Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 18.2, pp. 59 -100, Éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

GRENIER D., PAYAN C. (2002), *Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation en mathématiques discrètes.* Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques. Édité par l'ARDM. Paris.

GRUNDY P.M. (1930) *Mathematics and Games*, Eureka, Cambridge 1939 (1964), vol 2 (vol 27), pp 6-8 (pp 9-11).

GUEDJ D. (2001) *One zero show – Du point à la ligne*. Théâtre, Éditions du Seuil, Paris.

LEGRAND M. (1993) *Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse.* Repères IREM n°10, p. 123-159. Topics Editions.

NIMIER J. (1989) *Entretiens avec des mathématiciens*. IREM de Lyon.

OUVRIER-BUFFET C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques – Étude théorique et expérimentale auprès d'étudiants de 1ère année d'université.* Thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier, Grenoble. Disponible en ligne (http://tel.ccsd.cnrs.fr).

OUVRIER-BUFFET C. (sous presse) *Des définitions pour quoi faire ? Analyse épistémologique et utilisation didactique*. Collection « Éducation et sciences » dirigée par Sylvette Maury. Éditions Fabert.

OUVRIER-BUFFET (sous presse) Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics*.

POLYA G. (1989) *Comment poser et résoudre un problème*. Éditions Jacques Gabay.

RAMIREZ ALFONSIN, JL (2006) *The Diophantine Frobenius Problem*. Oxford University Press.

SCHOENFELD A. (1985) *Mathematical Problem Solving*. Academic Press. Orlando.

SPRAGUE R.P. (1935), *Über mathematische Kampfspiele,* Tôkoku Math J., 1935-36, vol 41, pp 438-444.

Ouvrage collectif du groupe ZEP-REP de l'IREM de Paris 7 (2002) *Expériences de narration de recherche en mathématiques*. Éd. ACL, Les éditions du Kangourou, IREM de Paris 7, Paris.

Sites web

Instructions officielles françaises : http://www.education.gouv.fr/

Programmes (français) du primaire : http://eduscol.education.fr/D0048/primacc.htm

Programmes (français) du secondaire : http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHPR01.htm

(MàM Valise) La valise de Maths à Modeler, http://www-leibniz.imag.fr/LAVALISE/debutval.php

(Narrations de recherche, IREM de Montpellier) http://www.mathadoc.com/chapitre.php?chap=432

(Narrations de recherche, IREM Paris 7)
http://www.math.jussieu.fr/~leidwang/wwwIREM/GroupeIrem3.htm